

L'âme de géomètre des abeilles

ALAIN SATABIN

Dès l'Antiquité, les mathématiciens ont remarqué que la forme des rayons des ruches optimise le rapport entre le volume disponible et la quantité de cire utilisée. Le démontrer est une autre affaire... qui n'est toujours pas achevée.

ne fleur de tournesol, un chou romanesco ou une toile d'araignée sont autant d'exemples dont la géométrie ne laisse pas indifférents les mathématiciens: la nature leur offre ainsi de nombreuses sources d'inspiration pour échafauder théories et modèles. Ils ont très tôt perçu le caractère minimaliste des

phénomènes naturels: le rayon lumineux choisit le chemin le plus court; les corps pesants se stabilisent où leur énergie est minimale; une goutte de liquide en apesanteur adopte une forme sphérique parfaite, minimisant ainsi sa surface. Si elle ne craint pas le vide, la nature a horreur de l'effort inutile!

Parmi les formes géométriques naturelles, la structure du nid d'abeilles est suffisamment surprenante pour laisser croire qu'elle n'est pas due au hasard. L'idée d'une forme minimale, grâce à laquelle l'abeille utiliserait le moins de cire possible pour construire des alvéoles de volume donné, a, depuis l'Antiquité, suscité nombre d'études, suppositions et démonstrations.

La présence de cellules de part et d'autre d'un plan semble assez naturelle: de cette façon, le fond des alvéoles est «rentabilisé» et sert doublement. En revanche, le reste de la structure est plus délicat à appréhender et son étude a été menée sur trois fronts: le problème de la «vue de face hexagonale», celui du fond et celui d'un nid en deux dimensions. Nous décrirons l'«état de l'art» actuel de ces trois points en signalant, pour chacun, quelques moments clés qui en balisent l'histoire.

Le premier problème a trait au pavage du plan. Malgré quelques différences minimes observées dans une vraie ruche, nous voyons que les alvéoles sont des tubes de section constante, de profondeur fixée, de volume donné et aux parois d'épaisseur

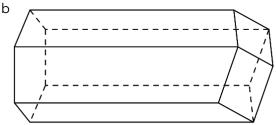
De toutes les structures hexagonales, la plus connue, et sans doute l'une des plus belles, est celle des alvéoles que construisent les abeilles D'Arcy Thompson

constante. Le problème d'économie de cire est alors celui de la recherche d'un pavage du plan par des formes d'aire donnée, de sorte que la longueur des courbes (les parois des alvéoles) le délimitant soit la plus petite possible. Ce problème est resté longtemps connu sous le nom de «conjecture du nid d'abeilles»: il s'agissait de démontrer que le pavage en hexagones réguliers fournit la meilleure solution. Cette preuve n'a été fournie que récemment, par Thomas Hales, de l'université du Michigan, le même mathématicien qui a démontré la conjecture de Kepler sur la meilleure façon d'empiler des sphères. Il a confirmé que les marchands de fruits adoptent une solution optimale pour ranger les oranges sur leur étal!

Le fond des alvéoles, qui constitue l'objet du deuxième problème, n'est pas plat, mais constitué de trois losanges terminant le prisme hexagonal «en pointe». Est-ce la configuration qui minimise la quantité de cire pour un volume égal? Nous verrons que l'étude, en trois dimensions cette fois, des faces de contact avec les cellules opposées a fait couler beaucoup d'encre et que la minimalité de la forme adoptée par les abeilles est remise en cause. Enfin, le dernier problème se ramène à l'étude de la vue «en coupe» d'un rayon: il s'agit là de paver une bande de plan en minimisant la longueur totale des parois. Là encore, des questions restent en suspens.

Revenons à la première question. Le pavage hexagonal régulier constitué par les alvéoles d'un nid d'abeilles est remarqué et signalé dans les écrits dès l'Antiquité: Aristote le mentionne dans son Histoire des animaux et Pline l'Ancien dans son *Histoire naturelle*. Ce dernier rapproche même la forme observée et les six pattes des abeilles!





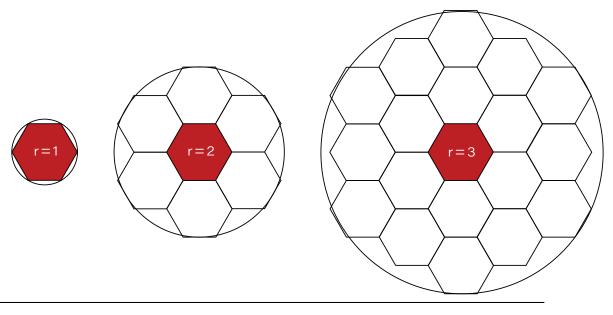


Les nids d'abeilles posent trois problèmes. Le pavage d'un plan par des hexagones minimise-t-il la cire utilisée (a)? La géométrie du fond des alvéoles est-elle la plus économique (b)? Enfin, le pavage d'une bande de plan choisi par les abeilles requiert-il le moins de matériel (c)?

La première étude mathématique de ce pavage date du IVe siècle. Dans Collections, Pappus d'Alexandrie affirme que les abeilles adoptent la forme hexagonale par souci d'économie de cire et leur attribue une «intuition géométrique». Plusieurs siècles plus tard, Érasme Bartholin (1625-1698) réfute cette interprétation et pense plutôt que les ouvrières fabriquent des

cellules cylindriques, mais que les forces de pression s'exerçant sur les parois, dues à la construction simultanée d'alvéoles contiguës, déforment les cercles pour les transformer en hexagones. Cette idée sera reprise, en 1753, par Buffon (1707-1788) dans son Traité d'Histoire naturelle.

Dans son étude, Pappus formule des hypothèses restrictives: le plan est pavé



Le rendement d'un pavage est le rapport de la somme des périmètres des pavés sur la somme de leurs aires. Pour éviter des quantités infinies, on calcule ce rapport pour un pavage inscrit dans un disque, puis on étudie l'évolution de ce rapport quand le rayon du disque croît. Par récurrence, on montre qu'un disque « hexagonal » de rayon n contient $(3n^2 - 3n + 1)$ cellules et (9n² - 3n) côtés au total. L'aire de chaque pavé vaut 1 et la longueur d'un côté vaut ⁴√12/3, le rendement tend vers $\sqrt[4]{12}$ quand *n* tend vers l'infini.

avec des polygones réguliers, tous identiques, d'aire donnée et assemblés par leurs côtés. Pour un tel recouvrement sans trous, seuls trois candidats subsistent: le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier.

Pour chacune de ces formes, dont on fixe arbitrairement l'aire égale à 1, quelle est celle dont le périmètre est minimal? Un triangle équilatéral d'aire 1 a un côté de longueur $2/\sqrt[4]{3}$ et donc un périmètre de $6/\sqrt[4]{3} \approx 4,56$. Un carré d'aire 1 a un côté de longueur 1, et donc un périmètre de 4. Enfin, un hexagone régulier d'aire 1 a pour côté $(\sqrt{2} \times \sqrt[4]{3})/3 = \sqrt[4]{12}/3$ et donc pour périmètre 2 × $\sqrt[4]{12} \approx 3,72$. Ce dernier est donc élu solution du problème de Pappus. Dans un pavage, chaque côté sert deux fois (sauf ceux du bord du recouvrement). Le rendement d'un pavage est alors mesuré en calculant le rapport de la somme des longueurs des côtés par la somme des aires des pavés. Si *k* régions, chacune d'aire 1, sont délimitées par des frontières de longueur totale L(k), le rapport L(k)/k mesure la rentabilité du pavage. Lorsque le pavage est étendu au plan tout entier, le nombre de cellules et la longueur des frontières deviennent infinis. On contourne cette difficulté en calculant le rapport précédent pour un pavage situé dans un disque (incluant un nombre fini de régions), puis en étudiant son comportement lorsque le rayon du disque tend vers l'infini. Pour un pavage hexagonal du plan, ce rapport tend vers $\sqrt[4]{12} \approx 1,86$, soit la moitié du périmètre trouvé plus haut, car chaque frontière sert exactement deux fois.

L'avancée significative suivante aura lieu plus de 1500 ans après! En 1943, le mathématicien hongrois Laslo Toth résout le premier problème à partir d'hypothèses moins restrictives que celles de Pappus, notamment de ne pas avoir toutes la même forme, ni même d'être des polygones réguliers. Sur une sphère de rayon 1, il analyse son découpage en n régions convexes de même aire, où n est un entier supérieur ou égal à 4. La convexité reste importante (une surface est convexe quand le plus court chemin reliant deux de ses points reste à l'intérieur de la surface). Cette convexité oblige la frontière entre deux régions à suivre une géodésique (un grand cercle) de la sphère puisque le moindre «renflement» de ce bord priverait la zone adjacente de sa convexité. On en déduit que les cellules de l'étude de Toth sont des polygones sphériques, c'està-dire qu'ils résultent de la projection sur la sphère d'un polyèdre convexe de même centre. L'intérêt d'une sphère plutôt qu'un plan apparaît ici, car on peut utiliser l'égalité d'Euler: pour un polyèdre convexe à F faces, S sommets et A arêtes, F + S - A = 2).

À l'aide, entre autres, de cette égalité et du fait qu'un polygone convexe d'aire donnée a un périmètre minimal lorsqu'il est

Après Pappus, il fallut attendre... 1500 ans pour voir une avancée significative sur le problème des alvéoles

régulier, Toth démontre que la longueur totale des frontières (sur la sphère) est supérieure à une expression M_{a} , dépendant de *n*, qui est homogène à une longueur.

Pour de grandes valeurs de *n*, *M*_n devient équivalente à $\sqrt[4]{12} \times \sqrt{n} \times S$, où S est l'aire de la sphère. Le raisonnement est mené sur

une sphère de rayon 1, mais le résultat subsiste sur une sphère quelconque. Quand on découpe la sphère, le résultat se circonscrit à une zone sphérique d'aire A, encadrant p cellules de même aire: pour de grandes valeurs de p, la longueur totale de bordures L(p) est, au mieux, égale à $\sqrt[4]{12} \times \sqrt{p} \times A$.

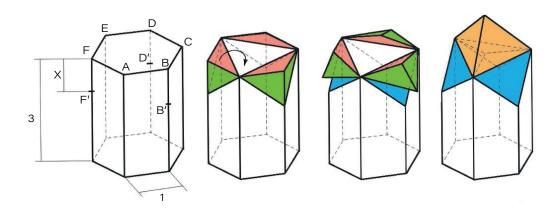
Avec une sphère de rayon très grand ainsi pavée par des cellules d'aire 1, l'aire A du domaine étudié est égale à p, soit le nombre de régions qu'il contient et la longueur du réseau de segments sphériques correspondant est donc au minimum équivalente à $\sqrt[4]{12} \times p$. Quand on identifie une petite portion de sphère de très grand rayon à un domaine plat, nous retrouvons le problème des abeilles. Lorsque p tend vers l'infini, le meilleur rapport L(p)/p est $\sqrt[4]{12}$ qui est, nous l'avons vu précédemment, celui d'un assemblage d'hexagones réguliers. Les abeilles sont, à ce stade, déjà confortées dans leur choix de structure hexagonale, mais l'hypothèse de la convexité est encore de trop pour une généralisation complète du problème. Toth était spécialisé en ce type de problème sur la sphère: il s'est par exemple interrogé sur la manière de disposer des points sur une sphère de façon que la distance maximale entre deux proches voisins soit aussi petite que possible. La formulation simple du problème ne doit pas inciter à croire qu'il est facile à résoudre.

Une convexité embarrassante

Dans la démonstration de Toth, l'hypothèse de convexité est nécessaire: son

raisonnement ne résiste pas à l'abrogation de ce prédicat. Il ajoute dans un ouvrage de 1964, où il revient sur ce sujet par un autre biais, que «la démonstration du résultat dans le cas général semble induire des difficultés considérables».

En 1994, dans un document consacré à l'étude des bulles de savon en deux dimensions, Frank Morgan, du Collège



Un prisme hexagonal n'est pas le plus économique en cire. Partons d'un prisme hexagonal (à gauche) dont le côté de la base est égal à 1 et la hauteur à 3. Puis, plaçons à une distance x de la base supérieure (ABCDEF) les points B', D' et F' homologues des points B, D et F, puis faisons pivoter de 180° les trois tétraèdres ABCB', CDED' et EFAF' autour des segments respectifs AC, CE et EA (à droite). Le prisme est devenu une alvéole d'abeille. Par construction, le volume reste inchangé, c'est-à-dire égal à $9\sqrt{3}/2$. La somme des aires est exprimée par une fonction F(x) dont l'étude révèle qu'elle atteint un minimum pour x égal à $\sqrt{2}/4$, soit environ 0,354, l'aire vaut alors environ 20,121. Les angles de cette alvéole minimale sont conformes aux mesures de l'astronome Maraldi.

Williams, à Williamstown, établit un résultat important en affaiblissant les hypothèses de Toth. Un nombre entier n étant fixé, F. Morgan considère l'ensemble des réseaux de courbes continues «suffisamment lisses» délimitant n régions bornées dont les aires ont, elles aussi, été fixées à l'avance. L'ensemble des longueurs de ces graphes possède une borne inférieure, celle qui correspond à un graphe limite. En d'autres termes, une certaine suite de graphes, répondant chacun aux hypothèses de départ, converge vers un graphe dont la longueur est cette borne inférieure.

Ensuite, le mathématicien montre que ce graphe limite est doté des mêmes qualités que les graphes de la suite dont il est né. Ce dernier point est important, car il n'est pas rare, en mathématiques, qu'une suite d'objets tous munis d'une même propriété la perdent après passage à la limite: le grand mathématicien Cauchy (1789-1857) commit ainsi l'erreur funeste d'affirmer qu'une suite de fonctions dérivables était aussi dérivable en tout point, ce qui est faux.

Ainsi, dans le plan, il existe bien un réseau de courbes de longueur minimale

encadrant un nombre fixé de régions bornées d'aires données. De plus, F. Morgan prouve que ce graphe minimal est constitué d'un assemblage d'arcs de cercles et de segments de droites se rejoignant aux sommets par groupes de trois, selon des angles de...120°, l'indice d'un pavage hexagonal.

Dans le cas d'un pavage infini du plan par des cellules d'aire unité, on mesure le rapport longueur/aire pour la partie située dans un disque. Au début de l'année 1999, F. Morgan montre qu'il est équivalent, d'une part, de tronçonner ainsi un pavage infini, puis d'estimer la meilleure limite de ce rapport lorsque le diamètre du disque tend vers l'infini et, d'autre part, de considérer, pour chaque entier n, le meilleur pavage à n régions (issu de son étude de 1994) et de calculer la limite du rapport longueur/aire associé quand n tend vers l'infini.

De plus, il prouve qu'il existe un réseau de courbes correspondant à cette borne inférieure de tous les rapports «limite». Ainsi prolonge-t-il son résultat de 1994 à un pavage infini et, même si la conjecture du nid d'abeilles n'est pas encore tombée à ce stade, l'existence d'une solution ne fait plus de doute.

Le pavage du plan en hexagones réguliers fournit un rapport limite de ⁴√12. Aussi, la preuve que ce nombre est justement la borne inférieure citée précédemment mettrait un point final à la conjecture. C'est connexe quand, schématiquement, il n'y a pas de trou).

Il établit ensuite qu'il suffit de prouver l'inégalité sur un tore, dont l'intérêt est d'être facilement identifiable à un rectangle plan et de permettre une cartographie sans bords extérieurs.

Le pavage en hexagones réguliers adopté par les abeilles depuis des millions d'années est bien optimal. Il serait intéressant de voir comment elles ont obtenu cette solution!

chose faite quelques mois plus tard, en juin 1999, lorsque T. Hales prouve que le meilleur rapport limite possible, pour un réseau de courbes planes délimitant une infinité de régions bornées et d'aire unité, est toujours supérieur à ⁴√12.

Grâce aux travaux de F. Morgan, T. Hales commence par réduire l'étude à celle d'un nombre fini de cellules, aux aires arbitrairement minorées, et montre qu'on peut même se limiter à des régions simplement connexes (un ensemble est simplement

Toujours à la recherche d'une minoration de la longueur des courbes en fonction des aires encadrées, T. Hales prouve qu'on peut se limiter à un graphe où les sommets sont chacun le point de rencontre d'exactement trois frontières. En approchant les arcs par des cordes judicieusement choisies, il établit alors une inégalité suffisante pour fournir la solution torique, inégalité qu'il démontre en analysant différents cas de positionnement des arcs de courbes par rapport aux segments et l'incidence du remplacement sur les aires des régions.

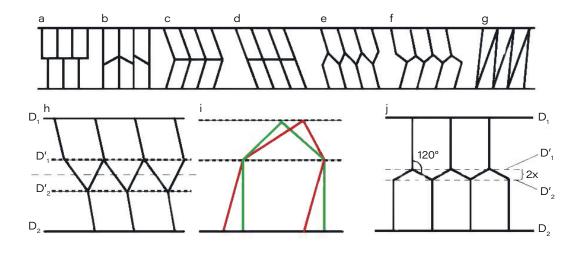
La conjecture du nid d'abeilles devenait un théorème: le plus court réseau de frontières délimitant des régions planes d'aires égales est bien le pavage en hexagones réguliers adopté par les abeilles... depuis des millions d'années. Il serait intéressant de voir comment les abeilles ont obtenu cette solution.

Le fond des alvéoles

Examinons le deuxième problème posé par les abeilles. L'astronome Kepler détermine les paramètres des trois losanges formant le fond d'une cellule, mais ses travaux passeront inaperçus. L'étude de ce problème resurgit au début du XVIIIe siècle lorsque l'astronome Maraldi (1665-1729), neveu de Cassini, mesure le plus précisément possible les angles des losanges de raccordement(109°28'et70°32')etattribue aux abeilles l'adoption de cette forme par sa simplicité de fabrication et son aspect esthétique.

Les cellules étant des prismes hexagonaux terminés par trois losanges, Réaumur (1683-1757) cherche quelle forme de ce type possède, pour un volume donné, une surface minimale. Il confie le problème au mathématicien suisse Samuel Koenig (1712-1757), qui publie dans les Mémoires de l'Académie une solution obtenue par le calcul différentiel. Il trouve, à deux minutes d'arc près, les angles mesurés par Maraldi: les abeilles ont résolu un problème d'optimisation en utilisant les méthodes de Newton et Leibniz!

Cette interprétation est récusée par Fontenelle (1657-1757), secrétaire perpétuel de l'Académie: «La grande merveille est que



Le problème du nid d'abeilles en deux dimensions consiste à trouver les pavages d'une bande par des polygones convexes superposables les plus économiques en cire. Plusieurs cas de figures sont possibles (en haut, de a à g). Quand chaque alvéole a un point sur le bord opposé à celui de son ouverture, le pavage est dit réduit (g). Pour résoudre ce problème (en bas), Bleicher et Toth tracent deux droites (h) D'1 et D'2 parallèles aux bords (D1 et D2) de la bande, qui sont en contact avec au moins un point des régions ouvertes sur l'autre côté. Le pavage est alors constitué de parallélogrammes et de triangles (i, en rouge) dont le périmètre est minimal quand les premiers sont des rectangles et les seconds des triangles isocèles (en vert). Au final, les mathématiciens montrent que la solution des abeilles (j, où x = 0,289) est l'un des pavages minimaux.

la détermination de ces angles [...] n'appartient qu'aux nouvelles méthodes fondées sur la théorie de l'infini. Mais à la fin les abeilles en sauraient trop, et l'excès de leur gloire en est la ruine. Il faut remonter jusqu'à une intelligence infinie, qui les fait agir aveuglément sous ses ordres, sans leur accorder de ces lumières capables de s'accroître et de se fortifier par elles-mêmes, qui font l'honneur de notre raison.»

Des alvéoles... de savon

Une partie de la communauté scientifique reste troublée par le fait que les abeilles adoptent une forme si proche de la solution optimale sans opter carrément pour celle minimisant la quantité de cire. D'autres mesures sont faites... mais rien n'y fait, les alvéoles persistent à respecter les angles de Maraldi! En 1743, le mathématicien écossais Colin Maclaurin (1698-1746) reprend le problème, révèle une erreur dans les calculs de Koenig et trouve, à la minute d'arc près, les angles de Maraldi. On découvrira la cause de l'erreur: les tables de logarithme utilisées par Koenig étaient fausses!

En postulant que les alvéoles sont élaborées à partir d'un prisme droit hexagonal, les dimensions de ce dernier dépendent de la morphologie des abeilles et doivent répondre à certaines contraintes.

L'observation montre que la profondeur d'une cellule est environ trois fois le côté de l'hexagone régulier. Ainsi, nous détaillerons la construction de l'alvéole sur la base d'un prisme hexagonal de côté 1 et de hauteur 3. La face d'entrée à une aire de $3\sqrt{3}/2$ et avec un fond d'alvéole plat, son volume vaudrait $9\sqrt{3}/2$ et sa surface $18+3\sqrt{3}/2 \approx 20,598$.

Existe-t-il une forme de même aire d'entrée (un hexagone régulier de côté 1) et de même volume total, dont l'aire des parois est plus petite encore? Oui, la forme observée par Kepler et Maraldi, puis étudiée par Koenig et Maclaurin: son aire vaut 20,121, soit moins que celle à fond plat; les losanges fermant la cellule ont pour diagonales $\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}/2$. Le calcul des angles confirme les angles mesurés par Maraldi.

En 1994, soit trente ans plus tard, D. Weaire et R. Phelan, du Trinity College de Dublin, ont étudié des films de savon. En injectant une solution savonneuse entre deux lames de verre, ils obtiennent précisément la forme de Toth, qui serait donc apparemment une forme minimale. Toutefois, ils remarquent qu'en épaississant les parois des alvéoles par l'ajout de matière, la structure des fonds bascule brutalement sur celle adoptée par les abeilles. Ainsi ces dernières utiliseraient bien la forme optimale, les parois n'ayant pas une épaisseur négligeable comme dans l'étude mathématique du problème.

Un nid en deux dimensions

En 1965, M.Bleicher et Toth se penchent sur le troisième problème, celui du nid d'abeilles en deux dimensions. On cherche le pavage de plus petit périmètre d'une bande de plan; ce pavage, constitué de cellules polygonales convexes superposables, est tel que chaque cellule possède un seul côté sur un bord de la bande (l'ouverture), et que, lorsque deux cellules sont superposées, les ouvertures se correspondent.

Les contraintes du problème ont deux conséquences. D'abord, deux cellules dont les ouvertures, ou bases, sont sur le même bord se déduisent l'une de l'autre par une translation ou par une symétrie par rapport à une droite perpendiculaire au bord. Ensuite, deux cellules dont les bases ne sont pas sur le même bord se déduisent l'une de l'autre par une symétrie selon l'axe médian des deux bords, éventuellement suivie d'une translation ou d'une symétrie ponctuelle dont le centre est situé sur cet axe médian.

Les auteurs ont également recours à la notion de pavage réduit, quand chaque alvéole possède aussi un point sur le bord opposé de sa base. Dans une première étape, ils montrent qu'un pavage réduit est nécessairement constitué de triangles, ceci pour respecter l'hypothèse de convexité.

Dans le cas général, ils font glisser un bord, par exemple D1, jusqu'à contacter en au moins un point les régions ouvrant sur l'autre bord, obtenant ainsi une parallèle D'1. Ils font de même avec l'autre bord D2. Les droites D'1 et D'2 peuvent être confondues ou égales respectivement à D1 et D2 quand le pavage est réduit. Dans tous les cas, ces deux nouvelles droites sont symétriques par rapport à l'axe de la bande.

Les formes identiques des cellules et la définition des deux nouvelles droites

entraînent que les parties situées entre D1 et D'1 ou entre D2 et D'2 sont uniquement constituées de parallélogrammes, et que la partie située entre D'1 et D'2 est un pavage réduit, donc un assemblage de triangles.

En rectifiant les parallélogrammes en rectangles, ni l'aire de la cellule ni la taille de la base ne changent tandis que le périmètre de l'alvéole diminue. Par ailleurs, parmi tous les triangles de base donnée (celle de la cellule) et de hauteur donnée (l'écart entre D'1 et D'2), et qui ont donc tous la même aire, celui de plus faible périmètre est le triangle isocèle. Ainsi, grâce à ces deux manipulations, nous substituons dans cette catégorie quand le triangle isocèle est aplati). Par ailleurs, Toth et Bleicher remarquent qu'il revient au même de se donner la taille *b* de la base et l'aire *a* d'une alvéole, que de se donner b et l'épaisseur w du nid, puisque ces trois quantités sont reliées par: 2a = bw. Ils posent alors la distance entre D'1 et D'2 égale à 2x et expriment la longueur totale des parois de la cellule en fonction de b, w et x.

Pour un nid d'abeilles où b = 2 (le diamètre de l'hexagone régulier de côté 1) et w = 6 (deux fois la profondeur moyenne de l'alvéole), la longueur est minimale pour *x* environ égal à 0,289.

Il reste à résoudre le problème tridimensionnel en ne fixant que les contraintes d'aire d'entrée et de volume de l'alvéole

à notre pavage initial un autre tout aussi satisfaisant, mais plus économique.

La recherche d'une solution minimale ne peut donc se faire que parmi les alvéoles constituées d'un rectangle couronné d'un triangle isocèle (le cas du fond plat entre

L'étude mathématique du cas général montre que le nid est soit constitué d'alvéoles en forme de pentagone à deux angles droits et trois angles de 120°, soit d'un pavage réduit constitué de triangles isocèles dont l'angle au sommet est supérieur à 120°.

Les problèmes d'économie résolus par les abeilles sont autant de défis posés aux mathématiciens. Les progrès sont constants, mais les questions sont encore nombreuses. Certes, le premier problème est entièrement élucidé dans son énoncé le plus général. En revanche, il en va différemment du deuxième problème: la forme polyédrale de Toth est plus économique que celle de Maraldi pour fermer les alvéoles, mais n'y en a-t-il pas une autre encore moins gourmande en surface? Qu'en est-il quand on n'impose pas aux cellules d'être construites à partir de prismes droits hexagonaux réguliers? En d'autres termes, il reste à résoudre le problème tridimensionnel en ne fixant que les contraintes d'aire d'entrée et de volume de l'alvéole.

Le troisième problème traite justement de cela, mais en deux dimensions. La démonstration que nous avons étudiée fixe des contraintes assez fortes: que se passe-t-il dans un cadre plus général? Et enfin, qu'en est-il si l'épaisseur des parois est prise en compte dans le problème spatial?

La surprenante architecture d'un nid d'abeilles garde encore quelques mystères. Doit-on se ranger à l'avis de Kepler, selon qui Anima praeditas et geometriae suo modo capaces («Les abeilles sont douées d'une âme et, de ce fait, capables de faire de la géométrie»).

> Article publié dans Pour la Science Hors-série n° 44 juillet 2004

Alain SATABIN

est professeur de mathématiques au lycée Gaspard-Monge de Charleville-Mézières.

BIBLIOGRAPHIE

A. Satabin, L'abeille géomètre, L'essaim, n° 1 (à paraître), 2004.

Frank Morgan, The Hexagonal honeycomb conjecture, Trans. AMS, vol. 351(5), pp. 1753-1763, 1999.

Thomas HaleS.

The honeycomb conjecture, http://xxx.lanl.org/abs/math.MG/9906042,

D. Weaire et R. Phelan, Optimal design of honeycombs, *Nature*, vol. 367, p. 123, 1994.